

Mathématiques approfondies

Les deux années de prépa : cours, méthodes, applications corrigées et travaux pratiques Python.

95

fiches de cours et applications corrigées

18

entraînements avec solutions expliquées

2

années de programme et informatique Python

EXTRAIT GRATUIT · 16 PAGES SÉLECTIONNÉES

COMMENCER

Comment travailler ce dossier

Un dossier de révision organisé pour retrouver les définitions, les hypothèses des théorèmes, les méthodes de résolution et les erreurs classiques. Chaque fiche contient un exemple expliqué et une application corrigée ; les entraînements transversaux réunissent plusieurs chapitres.

Le bon périmètre

Le périmètre retenu est l'intégralité des rubriques de mathématiques approfondies et d'informatique de première et deuxième années ECG. Le contenu de l'ancienne voie ECS sert de repère historique ; ce dossier ne prétend pas couvrir les mathématiques appliquées ni tous les anciens programmes ECS.

ECS et ECG : le repère à garder

ECS désigne l'ancienne voie scientifique des classes préparatoires économiques et commerciales. La filière ECG a pris le relais à partir de 2021. Ce dossier s'adresse au parcours actuel et signale les différences utiles avec les anciennes annales.

Une séance de travail

Lis une fiche, ferme le document puis reformule sa règle ou son argument central. Traite l'application avant de découvrir le corrigé. Note la cause de chaque erreur et refais la question deux jours plus tard. Les entraînements se rédigent sur une feuille séparée.

Ce que contient le PDF

95 fiches thématiques avec une application et sa correction, 18 entraînements plus développés, des outils de révision et les références officielles et une grille de couverture. Les sujets et corrigés sont des créations pédagogiques, sans affiliation aux banques de concours.

Les liens du sommaire, les signets et le pied de page permettent de naviguer. Les numéros indiqués sont ceux des pages du PDF.

CADRAGE

Programme et repères d'épreuve

La référence est l'annexe II du programme national ECG : deux années, quatre semestres et les travaux pratiques Python. Le contrôle porte sur les notions et savoir-faire énumérés par ce texte, et non sur un nombre arbitraire de pages. Une grille détaillée en fin de dossier relie chaque fiche aux pages du programme officiel.

Les compétences visées

Raisonner : expliciter les hypothèses, quantificateurs et domaines. Calculer : maîtriser les techniques et vérifier la cohérence du résultat. Modéliser : traduire une situation en objets mathématiques. Programmer : lire, compléter et interpréter des programmes courts. Communiquer : rédiger une justification que le correcteur peut suivre.

Cours, applications et statut des résultats

Les rubriques des quatre semestres et les travaux pratiques sont couverts. Les méthodes de simulation, la régression et les moindres carrés sont expliqués avec leur statut d'applications. Les démonstrations réputées admises par le programme ne deviennent pas des preuves à réciter. Le dossier prépare la révision ; les durées et coefficients d'épreuve se lisent dans la notice du concours visé.

Utiliser les anciennes annales

Choisir des sujets de mathématiques approfondies ECG. Pour les anciennes annales ECS, retirer les questions faisant appel à des connaissances sorties du programme, notamment les nombres complexes. Le déterminant général, le polynôme caractéristique, la composition générale des développements limités et le risque quadratique ne sont pas des résultats à connaître dans le cadre retenu.

Les durées et barèmes des exercices de ce dossier sont pédagogiques. Ils ne constituent pas un barème officiel.

SOMMAIRE 1/6

Choisir ta séance

Clique sur une entrée pour accéder au cours ou à l'entraînement.

- 01. Quantificateurs et démonstrations · **10**
- 02. Ensembles et opérations · **11**
- 03. Applications, images et bijections · **12**
- 04. Sommes, produits et binôme · **13**
- 05. Dénombrement et coefficients binomiaux · **14**
- 06. Polynômes réels et factorisation · **15**
- 07. Polynômes : degré et formule de Taylor · **16**
- 08. Matrices et systèmes linéaires · **17**
- 09. Calcul matriciel : règles et cas usuels · **18**
- 10. Espaces vectoriels, bases et dimension · **19**
- 11. Dimension, coordonnées et rang de famille · **20**
- 12. Sommes, sommes directes et supplémentaires · **21**
- 13. Applications linéaires, noyau et image · **22**
- 14. Isomorphismes, formes linéaires et hyperplans · **23**
- 15. Matrices d'applications et rang · **24**
- 16. Changement de base et projecteurs · **25**
- 17. Polynômes de matrices et annulateurs · **26**
- 18. Valeurs propres et diagonalisation · **27**
- 19. Trace et contrôles d'une réduction · **28**
- 20. Puissances de matrices et suites couplées · **29**

SOMMAIRE 2/6

Choisir ta séance

Clique sur une entrée pour accéder au cours ou à l'entraînement.

- 21. Produit scalaire et orthogonalité · **30**
- 22. Bases orthonormées et orthogonal d'un espace · **31**
- 23. Projection orthogonale et distance · **32**
- 24. Endomorphismes symétriques · **33**
- 25. Matrices symétriques et formes quadratiques · **34**
- 26. Réels, ordre et bornes · **35**
- 27. Limites de suites : définitions et règles · **36**
- 28. Suites réelles et récurrences · **37**
- 29. Récurrences linéaires d'ordre deux · **38**
- 30. Monotonie, suites adjacentes et sous-suites · **39**
- 31. Fonctions usuelles et trigonométrie · **40**
- 32. Limites, équivalents et comparaisons · **41**
- 33. Limites, continuité et prolongement · **42**
- 34. Continuité, dérivation et bijections · **43**
- 35. Images d'intervalles et fonction réciproque · **44**
- 36. Dérivées : calculs et inverse · **45**
- 37. Rolle, accroissements finis et prolongement C^1 · **46**
- 38. Dérivées successives et formule de Leibniz · **47**
- 39. Taylor avec reste et contrôle d'erreur · **48**
- 40. Convexité et développements limités · **49**

SOMMAIRE 3/6

Choisir ta séance

Clique sur une entrée pour accéder au cours ou à l'entraînement.

- 41. Développements limités : formulaire et calcul · **50**
- 42. Convexité, Jensen et extrema en une variable · **51**
- 43. Intégrales sur un segment · **52**
- 44. Intégrales : propriétés et sommes de Riemann · **53**
- 45. Intégrales impropres · **54**
- 46. Intégrales impropres : critères complets · **55**
- 47. Séries numériques · **56**
- 48. Séries de référence et télescopage · **57**
- 49. Intégrales dépendant d'un paramètre · **58**
- 50. Gradient et calcul différentiel · **59**
- 51. Domaines, continuité et géométrie en $\mathbb{R}^n$ · **60**
- 52. Hessienne et Taylor en plusieurs variables · **61**
- 53. Extrema et contraintes · **62**
- 54. Extrema globaux sur un ouvert convexe · **63**
- 55. Optimisation sous égalités linéaires · **64**
- 56. Espaces probabilisés finis · **65**
- 57. Événements et probabilités conditionnelles · **66**
- 58. Indépendance mutuelle et événements limites · **67**
- 59. Variables discrètes et moments · **68**
- 60. Espérance : existence et propriétés · **69**

SOMMAIRE 4/6

Choisir ta séance

Clique sur une entrée pour accéder au cours ou à l'entraînement.

- 61. Lois discrètes usuelles · **70**
- 62. Lois certaines et uniformes discrètes · **71**
- 63. Fonctions de répartition et caractérisation d'une loi · **72**
- 64. Couples, covariance et indépendance · **73**
- 65. Couples discrets : lois et transformations · **74**
- 66. Vecteurs aléatoires et coalitions · **75**
- 67. Covariance et corrélation : propriétés complètes · **76**
- 68. Conditionnement et sommes aléatoires · **77**
- 69. Espérance totale : conditions d'existence · **78**
- 70. Densité et fonction de répartition · **79**
- 71. Transformer une variable à densité · **80**
- 72. Moments des variables à densité · **81**
- 73. Lois continues usuelles · **82**
- 74. Exponentielle et loi normale : repères utiles · **83**
- 75. Fonction gamma et lois gamma · **84**
- 76. Convolution et stabilité des sommes · **85**
- 77. Inégalités et convergences · **86**
- 78. Convergences : définitions et opérations · **87**
- 79. Théorème limite central et approximations · **88**
- 80. Estimateurs, biais et convergence · **89**

SOMMAIRE 5/6

Choisir ta séance

Clique sur une entrée pour accéder au cours ou à l'entraînement.

- 81. Intervalles de confiance garantis · **90**
- 82. Intervalles asymptotiques et variance empirique · **91**
- 83. Python : boucles, fonctions et tableaux · **92**
- 84. Conditions, booléens et boucles sûres · **93**
- 85. NumPy : créer et parcourir des tableaux · **94**
- 86. NumPy : algèbre linéaire numérique · **95**
- 87. Statistiques descriptives et axes · **96**
- 88. Tracer fonctions, suites et surfaces · **97**
- 89. Simulation, Monte-Carlo et dichotomie · **98**
- 90. Approcher suites, séries, racines et intégrales · **99**
- 91. Simuler les lois usuelles · **100**
- 92. Inversion et simulations géométriques · **101**
- 93. Illustrer Poisson, grands nombres et TCL · **102**
- 94. Statistiques bivariées et régression · **103**
- 95. Monte-Carlo et couverture des intervalles · **104**
- Entraînement 01. Une récurrence et son erreur · **105**
- Entraînement 02. Diagonaliser pour calculer une puissance · **107**
- Entraînement 03. Projection sur un plan · **109**
- Entraînement 04. Une intégrale, une série et un contrôle · **111**
- Entraînement 05. Optimiser une fonction de deux variables · **113**

SOMMAIRE 6/6

Choisir ta séance

Clique sur une entrée pour accéder au cours ou à l'entraînement.

- Entraînement 06. Bayes et diagnostic d'un défaut · **115**
- Entraînement 07. Une loi jointe discrète · **117**
- Entraînement 08. Transformer une variable continue · **119**
- Entraînement 09. Programmer une estimation et la contrôler · **121**
- Entraînement 10. Biais et convergence de deux estimateurs · **123**
- Entraînement 11. Une application sur les polynômes · **125**
- Entraînement 12. Taylor, série et erreur explicite · **127**
- Entraînement 13. Une série à paramètre et ses restes · **129**
- Entraînement 14. Projection et ajustement affine · **131**
- Entraînement 15. Minimum sous deux contraintes linéaires · **133**
- Entraînement 16. Somme de durées et convolution · **135**
- Entraînement 17. Estimer la borne d'une loi uniforme · **137**
- Entraînement 18. Comparer deux intervalles par simulation · **139**
- Outils et plan de révision · **141**
- Références et grille de couverture · **143**

FICHE 18 · ALGÈBRE LINÉAIRE

Valeurs propres et diagonalisation

Comprendre

Un réel λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur v non nul tel que $Av = \lambda v$. L'espace propre associé est $\text{Ker}(A - \lambda I)$. On cherche les valeurs de λ pour lesquelles ce noyau n'est pas réduit à zéro, en résolvant le système par Gauss. Si $P(A) = 0$, toute valeur propre est une racine de P ; il faut ensuite vérifier les candidates.

Une matrice réelle de taille n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ lorsqu'il existe une base de n vecteurs propres réels. La somme des dimensions des espaces propres doit alors être n . Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants. En particulier, n valeurs propres distinctes suffisent ; cette condition n'est pas nécessaire.

Connaître les valeurs propres ne suffit pas : il faut étudier les espaces propres. Les matrices triangulaires permettent de lire les valeurs propres sur la diagonale, puis de résoudre les systèmes associés. Cette méthode respecte le cadre ECG sans recourir à un déterminant général ou au polynôme caractéristique.

Exemple expliqué

Pour $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, les valeurs propres sont 2 et 3. Les vecteurs $(1,0)$ et $(1,1)$ leur sont respectivement associés. Ils forment une base : avec $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, on a $A = P \text{diag}(2,3) P^{-1}$.

À toi de jouer

La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Corrigé

La matrice est triangulaire : son unique valeur propre est 1. Le noyau de $A - I$ est donné par $y = 0$, de dimension 1. On ne dispose donc pas d'une base de deux vecteurs propres : A n'est pas diagonalisable.

Point de vigilance : Le vecteur nul appartient à tous les espaces propres mais n'est jamais un vecteur propre.

FICHE 39 · ANALYSE

Taylor avec reste et contrôle d'erreur

Comprendre

Si f est de classe $C^{(n+1)}$ sur un intervalle contenant a et x , alors $f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + R_n(x)$, où $R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} dt$. Dans le cadre du programme, on peut l'utiliser notamment pour les fonctions C^∞ .

Si $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ sur le segment entre a et x , alors $|R_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$. Cette inégalité de Taylor-Lagrange donne une erreur chiffrée, contrairement à une seule notation o . Le majorant M doit convenir sur tout le segment, pas seulement au point a .

La formule exacte pour un polynôme est un cas particulier où une dérivée finit par être nulle. Pour une série comme celle de $\exp$, la convergence vers la fonction se justifie en montrant que le reste tend vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$, x étant fixé.

Exemple expliqué

Sur $[0 ; 0,1]$, $\exp(t) \leq \exp(0,1) < 1,106$. Ainsi $e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{0,1^2}{2} = 1,105$ avec une erreur inférieure à $1,106 \times 0,1^3/6 < 0,000185$.

À toi de jouer

Majorer l'erreur de l'approximation $\cos x \approx 1 - x^2/2$ sur $|x| \leq 0,1$.

Corrigé

Taylor à l'ordre 3 en 0 donne le même polynôme car $\cos'(0) = \cos'''(0) = 0$. La dérivée d'ordre 4 est $\cos$, de module ≤ 1 . L'erreur est au plus $|x|^4/24 \leq 1/240000$.

Point de vigilance : Le rang de la dérivée qui contrôle le reste est $n+1$, pas n .

FICHE 55 · ANALYSE

Optimisation sous égalités linéaires

Comprendre

Soit $C = \{x ; g_1(x) = b_1, \dots, g_p(x) = b_p\}$, les g_i étant linéaires, et $H = \{h ; g_i(h) = 0 \text{ pour tout } i\}$. Si C est non vide, $C = x_0 + H$ pour n'importe quel $x_0 \in C$. Seules les directions $h \in H$ sont admissibles.

Si $f \in C^1$ atteint un extremum local sur C en x_0 , alors $\nabla f(x_0) \cdot h = 0$ pour tout $h \in H$. Ainsi $\nabla f(x_0) \in H^\perp = \text{Vect}(\nabla g_1, \dots, \nabla g_p)$, donc il existe des réels λ_i tels que $\nabla f(x_0) = \sum \lambda_i \nabla g_i$. Résoudre ce système en ajoutant les contraintes fournit des candidats ; cela ne prouve pas leur nature.

Une autre méthode consiste à paramétrer C par des variables libres puis à optimiser la fonction restreinte. Pour établir un minimum global, réécrire la différence comme somme de carrés, utiliser une inégalité ou appliquer un critère de convexité à la fonction paramétrée. Le programme porte sur les égalités linéaires, pas sur un théorème général de contraintes non linéaires.

Exemple expliqué

Minimiser $x^2 + y^2 + z^2$ sous $x + y + z = 3$: $2x = 2y = 2z = \lambda$ donne $(1, 1, 1)$. Sur la contrainte, $x^2 + y^2 + z^2 = 3 + (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \geq 3$.

À toi de jouer

Minimiser $x^2 + 2y^2$ sous $x + y = 3$.

Corrigé

Poser $x = 3 - y$ donne $3y^2 - 6y + 9 = 3(y-1)^2 + 6$. Le minimum global vaut 6, uniquement en $(x, y) = (2, 1)$. Le système $2x = \lambda, 4y = \lambda$ conduit au même candidat.

Point de vigilance : Sous contrainte, le gradient n'est généralement pas nul ; il est orthogonal aux directions autorisées.

FICHE 95 · INFORMATIQUE PYTHON

Monte-Carlo et couverture des intervalles

Comprendre

Pour estimer $P(A)$, simuler N réalisations indépendantes et moyenner leurs indicatrices. Pour $I = \int [a,b] g(x) dx$, simuler U uniforme sur $[a,b]$ et moyenner $(b-a)g(U)$. Si la variance est finie, celle de la moyenne est divisée par N ; Tchebychev donne une garantie et le TCL une approximation de ses fluctuations.

Pour comparer des estimateurs, répéter le protocole R fois à paramètre fixé connu en simulation. Calculer les moyennes des estimateurs, leurs dispersions et leurs histogrammes. Pour un intervalle, compter les répétitions où il contient le paramètre et calculer ses demi-largeurs ; une couverture estimée est elle-même soumise à une fluctuation de taille environ $1/\sqrt{R}$.

Le code compare la couverture d'un intervalle normal conservateur à 95 % pour une proportion. Il illustre une propriété asymptotique ; remplacer r par $1/(2*np.sqrt(n*0.05))$ permet d'étudier l'intervalle garanti de Tchebychev.

Exemple expliqué

Pour $n=400$, la marge normale conservatrice vaut 0,049. Au voisinage de $p=1/2$, la couverture simulée doit être proche de 0,95, sans être exactement égale à chaque exécution.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
n, R, p = 400, 5000, 0.5
F = rd.binomial(n, p, R) / n
r = 1.96 / (2*np.sqrt(n))
couverture = np.mean(np.abs(F-p) <= r)
```

À toi de jouer

Comment obtenir les demi-largeurs moyennes dans cet exemple ?

Corrigé

La marge r est constante pour toutes les répétitions : la demi-largeur moyenne vaut donc r avant intersection éventuelle avec $[0,1]$. Un intervalle à variance estimée aurait des marges variables.

Point de vigilance : Une simulation vérifie une plausibilité sur les paramètres testés ; elle ne prouve pas une garantie uniforme.

ENTRAÎNEMENT 11 · ÉNONCÉ

Une application sur les polynômes

45 minutes · Sujet original

Situation et documents

Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on définit $f(P) = P + (1 - X)P'$. On utilise la base canonique $(1, X, X^2)$.

Travail demandé

1. Vérifier que f est un endomorphisme et écrire sa matrice.
2. Déterminer noyau, image et rang.
3. Chercher une base propre et diagonaliser f .
4. Exprimer f^n pour $n \geq 1$ sur la base propre.

Avant de regarder la correction

Calculer les images de la base, puis utiliser une base mieux adaptée à la formule de f .

ENTRAÎNEMENT 11 · CORRIGÉ

Une application sur les polynômes

Une proposition raisonnée ; les variantes valides sont acceptées.

1. Matrice

L'application est linéaire et conserve le degré au plus 2. $f(1)=1$, $f(X)=1$ et $f(X^2)=2X-X^2$. Donc $A=[[1,1,0],[0,0,2],[0,0,-1]]$.

2. Noyau et image

Pour $P=a+bX+cX^2$, $f(P)=(a+b)+2cX-cX^2$. Le noyau est $\text{Vect}(X-1)$, de dimension 1. L'image est $\text{Vect}(1, 2X-X^2)$, de dimension 2. Le rang vaut 2.

3. Base propre

La matrice triangulaire donne les candidates $1, 0, -1$. On a $f(1)=1$, $f(X-1)=0$ et $f((X-1)^2)=-(X-1)^2$. Ces polynômes sont libres, par leurs degrés distincts ; ils forment une base propre. La matrice de passage a colonnes $(1, 0, 0)$, $(-1, 1, 0)$, $(1, -2, 1)$.

4. Puissances

Si $P=\alpha+\beta(X-1)+\gamma(X-1)^2$, alors pour $n \geq 1$, $f^n(P)=\alpha+(-1)^n \gamma(X-1)^2$. Pour $n=0$, $f^0(P)=P$. La composante de valeur propre nulle disparaît après la première application.

Vérifier ta réponse

$\text{Trace}(A)=0=1+0-1$; la somme des dimensions propres vaut 3.

Autoévaluation : Matrice 5 points ; noyau/image 6 ; réduction 6 ; puissance 3.

BOÎTE À OUTILS

Formules à utiliser avec leurs hypothèses

Objet	Formule et condition
Suite affine	$u_n = \ell + a^n(u_0 - \ell)$, avec $\ell = b/(1-a)$ et $a \neq 1$.
Série géométrique	Somme de q^n pour $n \geq 0$: $1/(1-q)$, si $ q < 1$.
Rang	$\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rang } f$, pour E de dimension finie.
Diagonalisation	$A^n = P D^n P^{-1}$, si $A = P D P^{-1}$.
Projection sur u	$p(x) = [\langle x, u \rangle / \ u\ ^2] u$, avec u non nul.
Variance	$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$, si le second moment existe.
Somme	$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$.
Bayes	$P(A B) = P(B A)P(A)/P(B)$, si les conditionnements sont définis.
Moyenne empirique	Variance σ^2/n pour n variables indépendantes de même variance.
TCL	$\sqrt{n}(\text{moyenne} - \mu)/\sigma$ converge en loi vers $N(0, 1)$, sous hypothèses iid et $0 < \sigma^2 < \infty$.

Contrôle final

Avant chaque formule : préciser les domaines, les hypothèses, les indices et l'existence des quantités. Après le calcul : contrôler le signe, les bornes possibles et un cas simple.