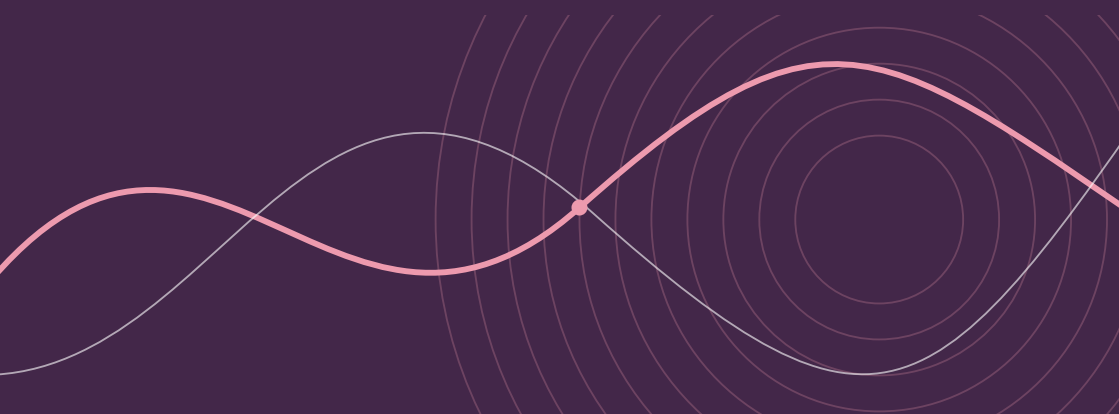


Mathématiques

L3

Fondamentaux &
exercices corrigés



Analyse avancée · Structures · Probabilités

100

PAGES POUR RÉVISER

24 fiches guidées
72 exercices corrigés

BIEN UTILISER CE PACK

Comprendre.

S'entraîner.

Vérifier.

Ce cahier de révision rassemble **24 fiches de quatre pages**. Chaque fiche suit le même parcours : cours essentiel, exemple résolu, trois exercices, puis corrections détaillées. Le volume compte 100 pages, couverture et repères compris.

Un cycle de travail efficace

1. **Cours.** Reformule les définitions et les hypothèses à voix haute.
2. **Exemple.** Cache la solution et cherche la prochaine étape.
3. **Exercices.** Rédige une réponse avant de consulter le corrigé.
4. **Retour.** Note l'erreur et refais l'exercice deux jours plus tard.

Le périmètre du volume

Ce volume L3 est une sélection de fondamentaux avancés : topologie métrique, calcul différentiel, mesure et intégration, structures algébriques, analyse complexe et probabilités. Il ne représente pas un programme national uniforme et ne couvre pas toutes les options de L3, notamment les EDP ou la géométrie différentielle. Ces fiches constituent un **complément aux cours et TD**. Les intitulés, l'ordre des chapitres et leur répartition entre années varient selon l'université. Le sommaire permet de comparer le pack à tes UE. Les exemples et exercices de ce cahier sont rédigés pour cette collection ; ce ne sont pas des annales officielles.

Édition de travail : septembre 2026. Les corrigés indiquent les étapes utiles ; les démonstrations longues des théorèmes ne sont pas toutes reproduites.

PARCOURS DE RÉVISION

Sommaire cliquable

01	Espaces métriques et ouverts	5
02	Compacité	9
03	Complétude	13
04	Point fixe de Banach	17
05	Applications linéaires continues	21
06	Différentielle de Fréchet	25
07	Inversion locale	29
08	Fonctions implicites	33
09	Multiplicateurs de Lagrange	37
10	Tribus et mesures	41
11	Intégrale de Lebesgue	45
12	Convergence monotone et Fatou	49
13	Convergence dominée	53
14	Tonelli et Fubini	57
15	Espaces L_p et inégalité de Hölder	61
16	Hilbert et projection orthogonale	65
17	Groupes et morphismes	69
18	Classes, quotients et Lagrange	73
19	Anneaux et polynômes quotients	77
20	Holomorphie et formule de Cauchy	81
21	Résidus	85
22	Convergences en probabilité	89
23	Théorème central limite	93
24	Fonctions caractéristiques	97

Chaque fiche : cours p. n , exemple p. $n + 1$, exercices p. $n + 2$, corrigés p. $n + 3$.

REPÈRES ET SOURCES

Ce qu'il faut vérifier

Avant de calculer

Précise l'ensemble de départ, les paramètres et les hypothèses. Une formule ne remplace pas ses conditions d'application. Distingue une égalité exacte, une équivalence et une approximation. Termine par une phrase qui répond à la question.

Conventions

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{R}$: réels, $\mathbb{C}$: complexes. Les vecteurs sont des colonnes. Sauf précision, les logarithmes sont naturels. Un intervalle fermé contient ses bornes. Les matrices d'applications utilisent les images des vecteurs de base en colonnes.

Maquettes consultées pour le périmètre

- Sorbonne Paris Nord : licence de mathématiques.
- Sorbonne Université : programme L2-L3 à distance.
- Université Lyon 1 : enseignements de licence.

Pour approfondir

Exo7 : cours, exercices et vidéos de mathématiques. Ressource complémentaire indépendante ; les établissements et Exo7 ne sont pas les éditeurs de ce pack et ne le cautionnent pas.

Ton plan de cours reste la référence

Les sources ci-dessus servent à cadrer les thèmes, pas à garantir une correspondance intégrale avec une formation. Pour un contrôle, utilise les notations et les méthodes exigées par ton enseignant.

FICHE 04 / LE COURS

Point fixe de Banach

Objectif

Utiliser une contraction pour prouver existence, unicité et convergence d'un algorithme.

Contraction

Sur un espace métrique complet non vide E , supposons que $T : E \rightarrow E$ vérifie

$$d(Tx, Ty) \leq qd(x, y), \quad 0 \leq q < 1.$$

Alors T admet un unique point fixe x_* , et les itérations $x_{n+1} = T(x_n)$ convergent vers lui pour tout $x_0 \in E$.

Estimation

Pour $n \geq 0$,

$$d(x_n, x_*) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(x_1, x_0).$$

Pour $0 < q < 1$ et $n \geq 1$, on dispose aussi de la borne a posteriori $d(x_n, x_*) \leq q d(x_n, x_{n-1}) / (1 - q)$. L'invariance de l'espace par T fait partie des hypothèses.

Point de vigilance

Une dérivée de module inférieur à 1 en un seul point ne fournit pas une contraction sur tout le domaine.

FICHE 04 / EXEMPLE RÉSOLU

Itérer le cosinus

Énoncé

Justifier la convergence de $x_{n+1} = \cos x_n$, avec $x_0 \in [0, 1]$, vers un unique point fixe de cet intervalle.

Espace et invariance

Le segment $[0, 1]$ est complet. Le cosinus l'envoie dans $[\cos 1, 1] \subset [0, 1]$.

Contraction

Sur $[0, 1]$, $|(\cos x)'| = \sin x \leq \sin 1 < 1$. Les accroissements finis donnent

$$|\cos x - \cos y| \leq (\sin 1)|x - y|.$$

Conclusion

Le théorème de Banach donne un unique $x_* \in [0, 1]$ tel que $x_* = \cos x_*$, et toute suite d'itérations démarrant dans le segment converge vers lui. On dispose en plus d'une borne géométrique avec $q = \sin 1$.

La méthode à retenir

Vérifier successivement : espace complet non vide, invariance, constante de contraction strictement inférieure à 1.

FICHE 04 / À TOI DE JOUER

Trois exercices

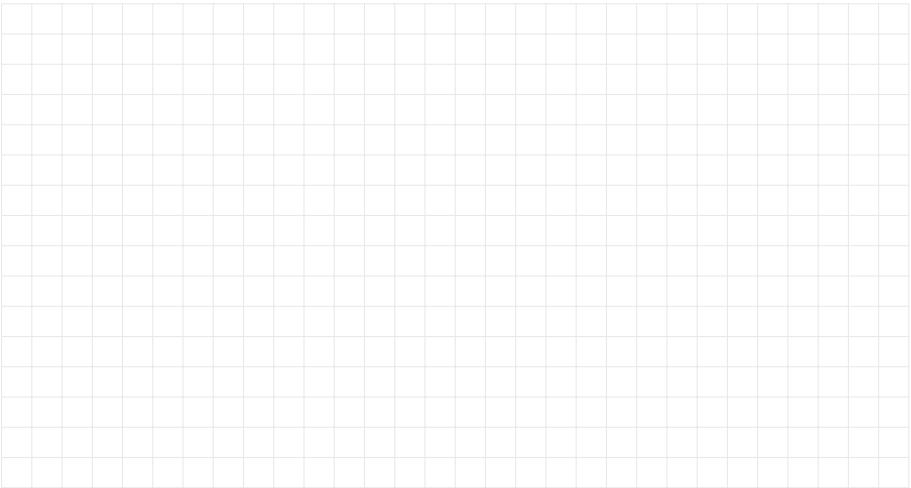
Point fixe de Banach

- 1. Trouver le point fixe de $T(x) = (x + 2)/3$ sur $\mathbb{R}$.
- 2. Pour cette application, exprimer $|x_n - x_*|$ en fonction de n .
- 3. Pourquoi $T(x) = x + 1$ sur $\mathbb{R}$ n'entre-t-elle pas dans le théorème ?

Un indice pour démarrer

Pour une application affine, le coefficient multiplicatif contrôle directement la contraction.

Espace de résolution



FICHE 04 / CORRIGÉS

Vérifie ton raisonnement

1. $x = (x+2)/3$ donne $x_* = 1$. L'application est contractante de constante $1/3$.
2. $x_{n+1} - 1 = (x_n - 1)/3$, donc $|x_n - 1| = 3^{-n}|x_0 - 1|$.
3. Sa constante de Lipschitz minimale vaut 1 , pas un nombre strictement inférieur à 1 . Elle n'a d'ailleurs aucun point fixe.

Auto-évaluation

As-tu vérifié que les itérés restent dans le domaine où la constante de contraction est valable ?

FICHE 23 / LE COURS

Théorème central limite

Objectif

Normaliser une somme et distinguer approximation asymptotique et calcul exact.

Énoncé classique

Soient X_i indépendantes et de même loi, d'espérance μ et de variance finie $\sigma^2 > 0$. Alors

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Interprétation

Pour un grand effectif, la moyenne est approximativement normale de moyenne μ et variance σ^2/n . Le théorème ne fournit pas à lui seul une erreur numérique pour un effectif donné.

Précautions

La taille requise dépend de la loi, de son asymétrie et de la zone de probabilité étudiée. Pour une variable discrète, une correction de continuité peut améliorer une approximation, sans la rendre exacte.

Point de vigilance

La normalisation d'une somme utilise $\sigma\sqrt{n}$; celle d'une moyenne utilise $\sigma/\sqrt{n}$.

FICHE 23 / EXEMPLE RÉSOLU

Normaliser un nombre de succès

Énoncé

Pour $S \sim \mathcal{B}(100, 1/2)$, approximer $\mathbb{P}(45 \leq S \leq 55)$ par une loi normale, avec correction de continuité.

Moments

La somme a moyenne $np = 50$ et variance $np(1-p) = 25$, donc écart-type 5.

Correction de continuité

L'événement discret allant de 45 à 55 est approché par l'intervalle continu $[44,5, 55,5]$.

Standardiser

$$\mathbb{P}(45 \leq S \leq 55) \approx \mathbb{P}(-1,1 \leq Z \leq 1,1), \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Cela vaut $2\Phi(1,1) - 1 \approx 0,729$. Il s'agit d'une approximation ; le résultat exact s'obtient par la somme des probabilités binomiales de 45 à 55.

La méthode à retenir

Identifier somme ou moyenne, calculer moyenne et écart-type, transformer les bornes, puis lire la loi normale.

FICHE 23 / À TOI DE JOUER

Trois exercices

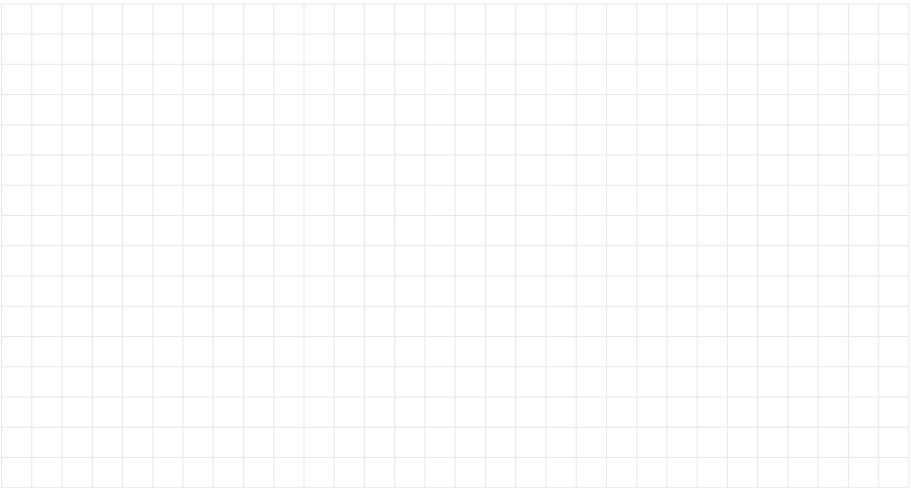
Théorème central limite

- 1. Une moyenne de 64 observations de variance 16 a quel écart-type ?
- 2. Exprimer approximativement $\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| \leq 2\sigma/\sqrt{n})$ avec une normale centrée réduite.
- 3. Pourquoi une variance infinie empêche-t-elle d'appliquer l'énoncé classique présenté ici ?

Un indice pour démarrer

Pour un intervalle symétrique, $\mathbb{P}(|Z| \leq a) = 2\Phi(a) - 1$.

Espace de résolution



FICHE 23 / CORRIGÉS

Vérifie ton raisonnement

1. La variance de la moyenne est $16/64 = 1/4$, donc son écart-type vaut $1/2$.
2. L'événement standardisé est $|Z| \leq 2$. Sa probabilité est environ 0,9545, sous une approximation TCL adaptée.
3. L'hypothèse de variance finie est absente et la normalisation par $\sigma\sqrt{n}$ n'a plus de sens avec $\sigma = \infty$. D'autres théorèmes peuvent exister, mais ce n'est pas celui-ci.

Auto-évaluation

As-tu indiqué clairement le caractère approximatif du résultat obtenu pour un effectif fini ?